

九州大学 未来の科学者養成講座

第4回公開講演会

「Hey ! Hey ! 平方数！」

福岡県立小倉高等学校

教諭 繁木 伸 孝

e-mail : yhw02304@nifty.com

(2010年2月20日)

Phase 1

次の問題とその解答例を鑑賞せよ。

問題

3 以上 9999 以下の奇数 a で $a^2 - a$ が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

[2005 東京大学]

解答例

$$a^2 - a = a(a-1) \quad , \quad 10000 = 5^4 \times 2^4$$

であり、 a と $a-1$ は 1 以外の公約数を持たない。このことを考慮すると a に対する条件は、

$$3 \leq a \leq 9999 \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

$$a \text{ は } 5^4 \text{ で割り切れる} \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

$$a-1 \text{ は } 2^4 \text{ で割り切れる} \quad \dots \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より} \quad a = 5^4 \alpha \quad (\alpha \text{ は奇数}) \quad \dots \quad \textcircled{4}$$

$$a-1 = 2^4 \beta \quad (\beta \text{ は整数}) \quad \dots \quad \textcircled{5}$$

とおくことができ、 $\textcircled{1}$ より

$$3 \leq 5^4 a \leq 9999 \quad \therefore 1 \leq \alpha \leq 15 \quad \dots \quad \textcircled{6}$$

$\textcircled{4}$ 、 $\textcircled{5}$ から a を消去すると

$$625 \alpha = 16 \beta + 1 \quad \dots \quad \textcircled{7}$$

$$\textcircled{7} \text{ と} \quad 625 \cdot 1 = 16 \cdot 39 + 1$$

$$\text{の差をとると} \quad 625(\alpha - 1) = 16(\beta - 39)$$

となり、 $\alpha - 1$ は 16 の倍数でなければならず、そのとき β も存在することがわかる。

$$\text{よって、} \alpha - 1 = 16n \quad \therefore \alpha = 16n + 1$$

$$\alpha \text{ は } \textcircled{6} \text{ をみたす奇数であるから} \quad \alpha = 1 \quad \therefore a = 625 \quad \dots \quad (\text{答})$$

Phase 2

次の問題に答えよ。電卓を使用してもよい。

問題

(1) 次の () の中を埋めよ。

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 25 = 5^2$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 121 = 11^2$$

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 = (\text{ア}) = (\text{イ})^2$$

$$4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 1 = (\text{ウ}) = (\text{エ})^2$$

(2) 連続した4つの整数の積に1を加えたものは常に平方数といえるか。

Phase 3

次の問題に答えよ。

問題

3桁の自然数の中に、その百の位の数字を取り去って生ずる2桁の数の平方に等しいものがあるか。

(つまり、 $she = (he)^2$ となる1桁の数 s, h, e はあるか?ということ。)

Phase 4

次の表を完成させよ。

n	n^2	n^2	n	n	n^2	n^2	n
0	0	2500	50	50	2500	10000	100
1	1	2401	49	51	2601	9801	99
2	4	2304	48	52	2704	9604	98
3	9	_____	47	53	_____	_____	97
4	16	2116	46	54	2916	9216	96
5	25	2025	45	55	3025	9025	95
6	36	_____	44	56	_____	_____	94
7	49	1849	43	57	3249	8649	93
8	64	1764	42	58	3364	8464	92
9	81	1681	41	59	3481	8281	91
10	100	1600	40	60	3600	8100	90
11	121	1521	39	61	3721	7921	89
12	144	_____	38	62	_____	_____	88
13	169	1369	37	63	3969	7569	87
14	_____	1296	36	64	4096	7396	86
15	_____	1225	35	65	4225	7225	85
16	_____	1156	34	66	4356	7056	84
17	_____	1089	33	67	4489	6889	83
18	_____	1024	32	68	4624	6724	82
19	_____	961	31	69	4761	6561	81
20	400	900	30	70	4900	6400	80
21	441	841	29	71	5041	6241	79
22	_____	784	28	72	5184	6084	78
23	_____	729	27	73	5329	5929	77
24	576	676	26	74	5476	5776	76
25	625	625	25	75	5625	5625	75

Phase 5

次の問題に答えよ。

問題 1

ある 2 桁の整数を 2 乗したところ、下 3 桁が同じ数字になりました。その数を求めなさい。

[1991 日本数学オリンピック予選]

問題 2

n は 4 桁の平方数であり、 n のどの桁の数字も 8 以下である。 n の各桁に 1 を加えてできる数も平方数であるという。このような n をすべて求めよ。

[1988 南半球数学オリンピック]

問題 3

4 桁の整数で、その下 2 桁の数と上 2 桁の数の和の平方となるものをすべて求めよ。

[1978 群馬大学]

Phase 6

次の問題に答えよ。

問題 1

2桁の自然数で、その平方の下2桁が元の自然数と等しいものをすべて求めよ。

問題 2

3桁の自然数で、その平方の下3桁が元の自然数と等しいものをすべて求めよ。

問題 3

4桁の自然数で、その平方の下4桁が元の自然数と等しいものをすべて求めよ。

Phase 7

次の数字達を観察せよ。

1	5	6
2	25	76
3	625	376
4	0625	9376
5	90625	09376
6	890625	109376
7	2890625	7109376
8	12890625	87109376
9	212890625	787109376
10	8212890625	1787109376
11	18212890625	81787109376
12	918212890625	081787109376
13	9918212890625	0081787109376
14	59918212890625	40081787109376
15	259918212890625	740081787109376

参考文献

- [1] 一松 信 : 「整数とあそぼう」, 日本評論社, 2006
- [2] 中沢 貞治 : 「数学教室の窓から一問題作りの風景」, 現代数学社, 1996
- [3] 中沢 貞治 : 「青春の日の数学セミナー一問題の展開と解決の機微」, 現代数学社, 1975
- [4] かえるさん ガビンさん : 「二桁のかけざん 一九一九 イクイク」,
ライブドアパブリッシング, 2005
- [5] かえるさん ガビンさん : 「一桁×二桁のかけざん 九一九 クイック」,
ライブドアパブリッシング, 2005

